17 Grundlagen der Matrizenrechnung

17.1 Grundbegriffe

1. Gegeben ist die folgende Matrix: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

   Welche der folgenden Matrizen ist die Transponierte dieser Matrix?

   a) $\begin{pmatrix} 7 & 8 & 8 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 3 \\ 3 & 4 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 8 & 8 & 7 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 4 & 2 \\ 7 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Gegeben sei eine Matrix der Ordnung $m \times n$. Welche Bedingungen müssen für m und n gelten, damit die Matrix **a)** quadratisch, **b)** ein Zeilenvektor, **c)** ein Spaltenvektor ist?

3. Wann ist eine Matrix symmetrisch?

   a) $AA^{-1} = E$; **b)** $A = A^{-1}$; **c)** $A^T = A$;
   d) $AA^T = A$; **e)** $A = A^T$; **f)** $A^{-1} = A^T$.

4. Was versteht man unter einer Diagonalmatrix?

17.2 Addition von Matrizen

1. $A_{3,4} + B_{4,5} = C_{mr}$. Wie groß sind m und r?

2. Gegeben sind die Matrizen

   $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   Bestimme: **a)** $A + B$; **b)** $A + C$; **c)** $A - C$; **d)** $C - A$; **e)** B^T .

3. Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 9 & 3 & 20 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme: **a)** $A + C$; **b)** $A - C$; **c)** $A + B$.

4. Wann können zwei Matrizen addiert werden?

a) Wenn die Anzahl der Zeilen und Spalten übereinstimmt?

b) Wenn die Anzahl der Zeilen übereinstimmt?

c) Wenn die Anzahl der Spalten übereinstimmt?

17.3 Skalares Produkt von Vektoren

1. Gegeben sind die beiden Vektoren $a = (a_1, \ldots, a_n)$ und $b = (b_1, \ldots, b_n)$. Wie ist das skalare Produkt dieser Vektoren definiert?

2. In einem sehr einfachen Modell einer Volkswirtschaft kommen nur die Industriezweige 1, 2 und 3 vor, die jeweils nur ein Gut, und zwar X, Y und Z herstellen. Es gibt fünf Nachfrager: den Staat, die privaten Haushalte und die 3 Industriezweige.

Für jeden Verbraucher sind die Nachfragemengen nach den drei Gütern in einem Vektor der Form $A =$ (Nachfrage nach X in Mengeneinheiten, Nachfrage nach Y in ME, Nachfrage in Z in ME) gegeben.

Staat: $A_{St} = (10, 8, 7)$;
private Haushalte: $A_{pH} = (5, 6, 6)$;
Industriezweig 1: $A_1 = (0, 3, 2)$;
Industriezweig 2: $A_2 = (3, 0, 1)$;
Industriezweig 3: $A_3 = (4, 2, 0)$;

Die Preise für die Güter X, Y, Z seien 5, 4 und 6 Geldeinheiten. Jeder Industriezweig produziert soviel von seinem Erzeugnis, dass die Nachfrage gerade gedeckt werden kann. Bestimme:

a) die Gesamtnachfrage nach jedem der drei Güter;

b) den Gewinn (Verlust), den jeder Industriezweig erwirtschaftet.

17.4 Multiplikation von Matrizen

1. Was muss für die Durchführung der Matrizenmultiplikation vorausgesetzt werden?
   a) Zeilenzahl des 1. Faktors = Zeilenzahl des 2. Faktors;
   b) Zeilenzahl des 1. Faktors = Spaltenzahl des 2. Faktors;
   c) Spaltenzahl des 1. Faktors = Zeilenzahl des 2. Faktors;
   d) Spaltenzahl des 1. Faktors = Spaltenzahl des 2. Faktors.

2. Gegeben sind die Matrizen

   $$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Bestimme: **a)** AB ; **b)** BA ; **c)** AC .

3. Gegeben sind die Matrizen

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Bestimme: **a)** AB ; **b)** AC ; **c)** BC .

4. Berechne: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. $A_{7,8}\, B_{8,11} = C_{nm}$. Wie groß ist n und m?

6. Seit Jahren werden die Wählerströme bei Kommunalwahlen in Groß Klekkersdorf beobachtet. Von Wahl zu Wahl ergab sich dabei eine gleichbleibende Übergangsmatrix zwischen den drei kandidierenden Partein des Dorfes:

nach	KS	RK	NSB
von KS	0,8	0,1	0,1
von RK	0,2	0,7	0,1
von NSB	0,2	0,3	0,5

   Das letzte Wahlergebnis lautet: KS: 40% ; RK: 50% ; NSB: 10% .
   Wie lautet das nächste Wahlergebnis?
   (Legende: KS = Klekkersdorfer Schwarze; RK = Rotfüchse Klekkersdorf; NSB = Norddeutsche Schwarz-Bunte).

7. Welche Bedingungen erfüllen die Matrizen A und B, wenn ihr Produkt $A_{mn}B_{rs}$

a) einen Zeilenvektor,

b) ein Skalar,

c) einen Spaltenvektor,

d) eine quadratische Matrix ergibt oder

e) gar nicht definiert ist?

8. Welche der folgenden Aussagen sind für Matrizen wahr?

A) $(ABCD)' = (DCBA)'$; **B)** $(ABCD)' = D'C'B'A'$;

C) $(ABCD)' = A'B'C'D'$; **D)** $(ABCD)' = B'A'D'C'$.

9. Ein Unternehmen produziert 3 Güter G_1, G_2 und G_3 aus den vier Rohstoffen R_1, R_2, R_3 und R_4. Folgende Mengen der Rohstoffe werden für die Produktion benötigt (ME = Mengeneinheit):

für eine ME von G_1: 3 ME R_1, 1 ME R_2, 1 ME R_3 und 2 ME R_4;
für eine ME von G_2: 1 ME R_1, 0 ME R_2, 4 ME R_3 und 4 ME R_4;
für eine ME von G_3: 2 ME R_1, 2 ME R_2, 2 ME R_3 und 0 ME R_4.

a) Welche Rohstoffkosten entstehen für je eine ME jeden Gutes, wenn die Rohstoffkosten: R_1: 2 GE, R_2: 1 GE, R_3: 4 GE, R_4: 2 GE betragen (GE = Geldeinheit)?

b) Wieviel Einheiten von jedem Rohstoff werden verbraucht, wenn die folgenden Mengen hergestellt werden: G_1: 3 ME; G_2: 3 ME; G_3: 1 ME?

10. Für die Bundestagswahl 2006 soll mit Hilfe einer Markov-Kette prognostiziert werden, wie die Wahlentscheidung der Wähler von 2002 diesmal ausfallen wird. Aus den neusten Veröffentlichungen des Meinungsforschers Prof. Dr. Populus Quak ist folgendes bekannt:

CDU-Wähler von 2002 wählen 2006
zu 80% CDU, zu 10% SPD und zu 5% FDP.
SPD-Wähler von 2002 wählen 2006
zu 85% SPD, zu 10% CDU und zu 3% FDP.
FDP-Wähler von 2002 wählen 2006
zu 30% FDP, zu 40% CDU und zu 25% SPD.
Die Wähler der Grünen 2002 wählen 2006
zu 40% CDU, zu 40% SPD und zu 5% FDP.
Die an 100% fehlenden Anteile gehen an die Grünen.

a) Stelle die Übergangsmatrix auf!

b) Das Wahlergebnis von 2002 lautet: CDU/CSU 44,3%; SPD 37%; FDP 8,3%; Grüne 9,1%. Gib auf dieser Basis eine Prognose für das Wahlergebnis von 2006 mit Hilfe der Markov-Kette in Matrizenschreibweise.

11. Die Volkswirtschaft des Staates Tritanien besteht aus nur drei Zweigen. Jeder Zweig Z_i produziert die Menge x_i gemessen in ihrem Wert in TR (Tritanische Rubel). Ein Teil dieser Menge x_i wird dem Endverbraucher zur Verfügung gestellt, dieser Teil wird mit y_i bezeichnet.
Aufgrund der Verflechtung der Volkswirtschaft liefert der Zweig Z_i aber auch Teile seiner Produktion an die anderen Zweige Z_j und verbraucht einen Teil selbst. Die Koeffizienten der folgenden Matrix $A = (a_{ij})$ geben an, welcher wertmäßige Anteil der Produktion von Z_j aus der Produktion von Z_i stammt:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

Die Endnachfrage sei wertmäßig durch $y = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix}$ gegeben.

Welche (wertmäßigen) Mengen müssen von den Zweigen der Volkswirtschaft produziert werden, um die Endnachfrage zu befriedigen? Formuliere hierfür einen geeigneten Lösungsansatz. (Keine Rechnung).

12. Für reelle Zahlen gilt bekanntlich $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. Warum gilt für Matrizen nicht allgemein $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$?

18.2 Lösung Linearer Gleichungssysteme

1. Löse folgendes Gleichungssystem durch vollständige Elimination:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 2 \\ 3x + 4y + 6z &= 7 \\ 2x + 2y + 5z &= 3\,. \end{aligned}$$

2. Löse das Gleichungssytem
$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 3x + y - 2z &= 1 \\ 2y + z &= 10\,. \end{aligned}$$

3. Der Chemiestudent Egon Knallgas hat einen neuen, papierähnlichen Stoff entwickelt, der den bekannten "Schwalben" bessere Flugeigenschaften verleihen soll. Leider ist der Stoff ein Zufallsprodukt aus den Zutaten Zellstoff, Leim und zwei geheimnisvollen Lösungen A und B (deren Zusammensetzung der Öffentlichkeit vor der Anmeldung beim Patentamt nicht bekanntgegeben werden darf), und Egon weiß die Mengen der einzelnen Bestandteile nicht mehr. Er hat nur noch einen Schmierzettel mit den folgenden Bemerkungen gefunden: Menge ergibt $100\,g$! Zellstoff zu Leim wie 5 zu 1! Lösungen A und B zu gleichen Teilen! Halb so viel Leim wie Lösung A nehmen! Wie kann man aus diesen Angaben die Mengen der einzelnen Zutaten errechnen?

4. Ein Teegroßhändler führt drei Sorten Tee: Darjeeling-, Ceylon- und Keniatee. Er hat zu Beginn der ersten Woche insgesamt 17 Tonnen Tee am Lager. Im Laufe der ersten Woche verkauft er die Hälfte seines Bestandes an Darjeeling, 1/4 seines Bestandes an Ceylontee und 3/8 seines Bestandes an Keniatee, zusammen 7 Tonnen. In der Woche darauf verkauft er den gesamten Restbestand an Darjeelingtee und hat dann noch 5 Tonnen am Lager. Wie groß war die am Anfang der ersten Woche vorhandene Menge jeder Sorte? Formuliere das Problem als Lineares Gleichungssystem und bestimme die Lösung.

5. Löse das folgende Gleichungssystem durch vollständige Elimination.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 6 \\ 4x_1 + 2x_2 + 9x_3 &= 9\,. \end{aligned}$$

6. Löse das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 7 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 20 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

7. Löse folgende Gleichungssysteme mit Hilfe des GAUSS'schen Algorithmus.

a) $$\begin{aligned} 2x + y + 5z &= 7 \\ 2x + 5y + 2z &= 5 \\ 4x + 2y + z &= -4\,; \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 5x + 2y + 3z &= 5 \\ 10x + 5y + 6z &= 13 \\ 15x + 6y + 9z &= 12\,. \end{aligned}$$

8. Der Psychotherapeut U. Nehrlich betreut Protestierer (P), Chaoten (C), Bummelanten (B) und Rechtschaffene (R). Auf die Frage des Journalisten Klaus-Heinrich Kraxdorf, wieviel der von ihm betreuten 120 Studenten auf die einzelnen Gruppen entfallen, antwortet Herr Nehrlich verschmitzt:
- dass es 50% mehr Rechtschaffene als Protestierer gibt;
- dass Bummelanten und Chaoten zusammen gerade die Differenz zwischen Rechtschaffenen und Protestierern ergeben;
- dass es dreimal so viel Bummelanten wie Chaoten gibt.

Ermittle die richtigen Anzahlen für P, C, B und R.

9. Welche der Aussagen über lineare Gleichungssysteme sind wahr?

a) Ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen in n Variablen ist immer lösbar.

b) Wenn ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen in n Variablen lösbar ist, dann auch eindeutig.

c) Es gibt ein lineares Gleichungssystem, das genau zwei verschiedene Lösungen hat.

d) Ein Gleichungssystem, das mehr Gleichungen als Variablen hat, ist nicht lösbar.

e) Die Lösungen eines Gleichungssystems erfüllen alle Gleichungen des Systems. Werte, die nur eine Gleichung nicht erfüllen, sind keine Lösungen.